ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ (ΝΕΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)
(Ενδεικτικές Απαντήσεις)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία, βλ. σχολικό βιβλίο σελ.262 (i)
Α2. Θεωρία, βλ. σχολικό βιβλίο σελ.141
Α3. Θεωρία, βλ. σχολικό βιβλίο σελ.246-247
Α4. α) Λάθος β) Σωστό γ) Λάθος δ) Σωστό ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R με

$$f'(x)=\frac{(x^2)'(x^2+1)-(x^2)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}=\frac{2x(x^2+1)-x^2 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{2x}{(x^2+1)^2}.$$

Λύνουμε την εξίσωση $f'(x)=0 \Leftrightarrow 2x=0 \Leftrightarrow x=0$

Λύνουμε την ανίσωση $f'(x)>0 \Leftrightarrow \dfrac{2x}{(x^2+1)^2}>0 \Leftrightarrow 2x>0 \Leftrightarrow x>0$

Λύνουμε την ανίσωση $f'(x)<0 \Leftrightarrow \dfrac{2x}{(x^2+1)^2}<0 \Leftrightarrow 2x<0 \Leftrightarrow x<0$

Το πρόσημο της f ′ φαίνεται στον πίνακα που ακολουθεί

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f ′	$-$		$+$
f	↘		↗

Επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$ και παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση 0 ίσο με f(0)=0

Β2. Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R με

$$f''(x)=\left(\frac{2x}{(x^2+1)^2}\right)'=\cdots=\frac{2-6x^2}{(x^2+1)^3}$$

Λύνουμε την εξίσωση, $f'(x)=0 \Leftrightarrow 2\left(-3x^2+1\right)=0 \Leftrightarrow -3x^2+1=0 \Leftrightarrow x^2=\frac{1}{3} \Leftrightarrow$
$x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ ή $x=-\frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ ή $x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Το πρόσημο της f′′ φαίνεται στον πίνακα που ακολουθεί

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$
f″	−	+	−	
f	∩	∪	∩	

Η f είναι κοίλη στα διαστήματα $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$ και $\left[\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$

και κυρτή στο διάστημα $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$.

Η f έχει σημεία καμπής τα $A\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)=A\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{1}{4}\right)$ και

$B\left(\frac{\sqrt{3}}{3},f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)=B\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{1}{4}\right)$ αφού η f' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν αυτών και ορίζεται εφαπτομένη στα σημεία αυτά.

B3.

Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής και ορισμένη στο R , δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Θα μελετήσουμε αν η f έχει οριζόντιες ασύμπτωτες.

Βρίσκουμε το $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$$

Επομένως η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο +∞ και στο - ∞ την ευθεία y=1

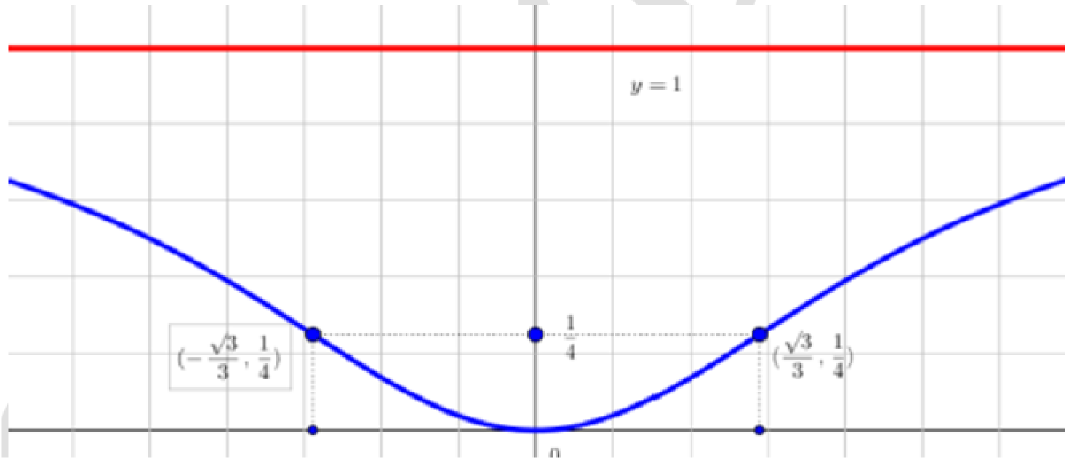
Επιμέλεια Υλικού: Δήμητρα Χατζηγεωργιάδου

Γ. Ιωαννίδη 3 | Πανόραμα, Θεσσαλονίκη | **T:** 2310 341518 | info@protipoedu.gr | **www.protipoedu.gr**

Β4. Φτιάχνουμε τον πίνακα μεταβολών της f

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
f′(x)		−		−	0	+		+	
f′′(x)		−	0	+		+	0	−	
f(x)	1	↘	$\frac{1}{4}$	↘	0	↗	$\frac{1}{4}$	↗	1

Με βάση τις απαντήσεις στα ερωτήματα Β1,Β2,Β3 η γραφική παράσταση της f είναι



ΘΕΜΑ Γ

Γ1 .Θεωρουμε τη συναρτηση f(x) =(e^{x^2} - x^2 -1)

Η f ειναι παραγωγισιμη στο R με f ′(x) =($2e^{x^2}$.χ -2χ) =2χ .($e^{x^2}-1)$

Λυνουμε την εξίσωση f ′ (x)= 0 ⇔ x=0 η e^{x^2} -1 = 0 ⇔ x=0

Είναι $χ^2 \geq 0$ για καθε πραγματικο αριθμο χ.Οποτε $e^{x^2} \geq e^0 = 1$.

Άρα e^{x^2} -1 ≥ 0

Άρα το πρόσημο της f′ εξαρτάται από το πρόσημο του 2x και φαίνεται στον ακόλουθο πίνακα

Γ. Ιωαννίδη 3 | Πανόραμα, Θεσσαλονίκη | **T:** 2310 341518 | info@protipoedu.gr | **www.protipoedu.gr**

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f′	$-$		$+$
f	↘		↗

Επειδή η f έχει ολικό ελάχιστο στο 0, το f(0) = 0 έχουμε f(x) ≥ 0 για κάθε x∈ R με την ισότητα να ισχύει μόνο για x = 0 άρα η εξίσωση f(x) =0 έχει μοναδική ρίζα το x_0 =0.

Γ2.

Από τη σχέση $f^2(x) = (e^{x^2} - x^2 - 1)^2$ έχουμε ισοδύναμα $|f(x)| = |(e^{x^2} - x^2 - 1|$

Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $(-\infty, 0)$ και δε μηδενίζεται σε αυτό, θα διατηρεί σταθερό πρόσημο. Επομένως

- Αν $x\in(-\infty, 0)$ και $f(\chi) < 0$ τότε στο διάστημα αυτό είναι ,

$f^2(x) = (e^{x^2} - x^2 - 1)^2 \Leftrightarrow f(x) = -(e^{x^2} - x^2 - 1)$

- Αν $x\in(-\infty, 0)$ και $f(\chi) > 0$ τότε στο διάστημα αυτό είναι ,

$f^2(x) = (e^{x^2} - x^2 - 1)^2 \Leftrightarrow f(x) = -(e^{x^2} - x^2 - 1)$

Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο, $(0\ +\infty)$ και δε μηδενίζεται σε αυτό, θα διατηρεί σταθερό πρόσημο. Επομένως

- Αν $x\in(0,+\infty)$ και $f(\chi) < 0$ τότε στο διάστημα αυτό είναι ,

$f^2(x) = (e^{x^2} - x^2 - 1)^2 \Leftrightarrow f(x) = -(e^{x^2} - x^2 - 1)$

- Αν $x\in(0,+\infty)$ και $f(\chi) > 0$ τότε στο διάστημα αυτό είναι ,

$f^2(x) = (e^{x^2} - x^2 - 1)^2 \Leftrightarrow f(x) = -(e^{x^2} - x^2 - 1)$

Συνεπώς προκύπτουν οι εξής συνδυασμοί για τον τύπο της f

$f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1\ ,\ x \in \mathbb{R}$ ή $f(x) = -(e^{x^2} - x^2 - 1)\ ,\ x \in \mathbb{R}$

ή $f(x) = \begin{cases} e^{x^2} - x^2 - 1 & ,\ x \geq 0 \\ -\left(e^{x^2} - x^2 - 1\right) & ,\ x < 0 \end{cases}$ ή $f(x) = \begin{cases} -(e^{x^2} - x^2 - 1) & ,\ x \geq 0 \\ e^{x^2} - x^2 - 1 & ,\ x < 0 \end{cases}$

Επιμέλεια Υλικού: Δήμητρα Χατζηγεωργιάδου

Γ. Ιωαννίδη 3 | Πανόραμα, Θεσσαλονίκη | **Τ:** 2310 341518 | info@protipoedu.gr | **www.protipoedu.gr**

Γ3.
Από το Γ1 παραγωγίζοντας τη πρώτη παράγωγο της f έχουμε
f ' (x) = 2x .($e^{x^2} - 1$)

$$f''(x) = 2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2} - 2 = 4x^2e^{x^2} + 2e^{x^2} - 2 = 4x^2e^{x^2} + 2\left(e^{x^2} - 1\right) \geq 0$$ με

την ισότητα να ισχύει μόνο για x=0, οπότε η f κυρτή στο R

Γ4. Για την εξίσωση f(|ημx|+3) - f(|ημx|) = f(x+3) - f(x) (1)
Θεωρούμε τη συναρτηση g(x) = f(x+3) - f(x) στο [0 , +∞)
Η g είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση ως διαφορά και σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο [0,+∞) με g΄(x) = f΄(x+3) .(χ +3) ΄ - f΄(x) = f΄(x+3) - f΄(x)
Για τη μονοτονία της f έχουμε ότι για x < x+3 ⇔ f΄(x) < f΄(x+3) <⇔ f΄(x+3) - f΄(x) >0
Οπότε g ' (x) >0 και συνεπώς η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση άρα και ΄΄1–1΄΄ οπότε η εξίσωση (1) γράφεται:
g (Ι ημχ Ι) = g (χ) ⇔ Ι ημχ Ι = χ ⇔ χ=0
Αφού από τη θεωρία έχουμε ότι Ι ημχ Ι ≤ Ιχ Ικαι για x ≥ 0 ισχύει Ι ημχ Ι ≤ χ με την ισότητα να ισχύει για x=0.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Ισχύουν ισοδύναμα: $\int_0^{\pi} (f(x) + f''(x))\eta\mu x\, dx = \pi \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\pi} f(x)\eta\mu x\, dx + \int_0^{\pi} (f'(x))'\eta\mu x\, dx = \pi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\pi} f(x)\eta\mu x\, dx + \left[f'(x)\eta\mu x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} f'(x)\sigma\upsilon\nu x\, dx = \pi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\pi} f(x)\eta\mu x\, dx + 0 - \left[f(x)\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} f(x)\eta\mu x\, dx = \pi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -f(\pi)\sigma\upsilon\nu\pi + f(0)\sigma\upsilon\nu 0 = \pi \Leftrightarrow f(\pi) + f(0) = \pi \quad , \quad (1)$$

Επιμέλεια Υλικού: Δήμητρα Χατζηγεωργιάδου

Για τη συνάρτηση $h(x)=\frac{f(x)}{\eta\mu x}$ ισχύει $\lim\limits_{x\to 0} h(x)=1$. Είναι

$f(x)=h(x)\eta\mu x$ κοντά στο x=0. Άρα $\lim\limits_{x\to o} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} h(x)\cdot\lim\limits_{x\to 0}\eta\mu x=1\cdot 0=0$

Όμως η f είναι συνεχής στο x=0 , άρα θα ισχύει $f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$.

Έτσι η (1) γράφεται $f(\pi)=\pi$

Για το f΄(0) έχουμε

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)}{\eta\mu x}\frac{\eta\mu x}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)}{\eta\mu x}\right)\lim_{x\to 0}\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)=1\cdot 1=1$$

Άρα f΄(0) = 1

Δ2α

Παραγωγίζοντας τη σχέση $e^{f(x)}+x=f(f(x))+e^x$ για κάθε x∈ R η οποία αποτελείται από παραγωγίσιμες συναρτήσεις

έχουμε $e^{f(x)}\cdot f'(x)+1=f'(f(x))\cdot f'(x)+e^x$ (1)

Έστω ότι η f έχει ακρότατο στη θέση x0∈.R □

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο εσωτερικό σημείο x_0∈R

από το Θεώρημα Fermat έχουμε $f'(x_0)=0$ (2).

οπότε η σχέση (1) για $x=x_0$ γίνεται

$e^{f(x_0)}\cdot f'(x_0)+1=f'(f(x_0))\cdot f'(x_0)+e^{x_0}$

Άρα $1=e^{x_0}$ άρα $\chi_0=0$ οπότε ΑΤΟΠΟ, αφού $f'(0)=1$

Άρα η f δεν έχει ακρότατα στο R

Δ 2β.

Επειδή

• η f δεν έχει ακρότατα στο R θα ισχύει για κάθε $f'(x)\neq 0$ x ∈ R

η f΄ είναι συνεχής, ως παραγωγίσιμη στο R , αφού η f είναι 2 φορές παραγωγίσιμη στο R επομένως η f΄ θα διατηρεί το πρόσημο της.

Επιπλέον f΄(0) = 1 > 0, άρα f΄(x) > 0 οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο R .

Δ3. Επειδή η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο

$f(\mathbb{R})=\left(\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right)=(-\infty,+\infty)$. Άρα $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

Ισχύει ότι $|\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x|\le|\eta\mu x|+|\sigma\upsilon\nu x|\le 1+1=2$

Άρα $\left|\dfrac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}\right|\le\dfrac{2}{|f(x)|}\Leftrightarrow-\dfrac{2}{|f(x)|}\le\dfrac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}\le\dfrac{2}{|f(x)|}$

Επειδή $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{2}{|f(x)|}=0=\lim_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{2}{|f(x)|}\right)$. Άρα από κριτήριο παρεμβολής

$\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}=0$

Δ4. Είναι $\int_1^{e^\pi}\dfrac{f(\ln x)}{x}dx=\int_0^\pi f(u)\,du=\int_0^\pi f(x)\,dx$ αφού θέτοντας $u=\ln x$ θα

έχουμε: $du=\dfrac{1}{x}dx$ και όταν $x=1\Rightarrow u=0$ και όταν $x=e^\pi\Rightarrow u=\pi$.

Για κάθε $0\le x\le\pi\Rightarrow f(0)\le f(x)\le f(\pi)\Rightarrow 0\le f(x)\le\pi$ αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Η f δεν είναι παντού μηδέν (αφού $f(\pi)=\pi>0$) άρα θα ισχύει ισοδύναμα:

$$0<\int_0^\pi f(x)dx<\int_0^\pi \pi\,dx\Leftrightarrow 0<\int_0^\pi f(x)\,dx<[\pi x]_0^\pi\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0<\int_1^{e^\pi}\frac{f(\ln x)}{x}dx<\pi^2.$$

Επιμέλεια Υλικού: Δήμητρα Χατζηγεωργιάδου