ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ 9 ΙΟΥΝΙΟΥ 2017
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (Ενδεικτικές Απαντήσεις)

Θέμα Α

Α1.
Θεωρία, βλ. σχολικό βιβλίο το θεώρημα της σελ. 135 (παράγραφος 2.6)

Α2. **α)** Ψευδής

β) Από τη θεωρία του σχολικού βιβλίου (παράγραφος 2.1) γνωρίζουμε πως αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της τότε είναι και συνεχής στο x_0.

Αντιπαράδειγμα: $f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ η οποία είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

Α3. Θεωρία, βλ. σχολικό βιβλίο ορισμός στη σελ. 73 (παράγραφος 1.8)
Α4. α) Λάθος β) Σωστό γ) Λάθος δ)Σωστό ε) Σωστό

Θέμα Β

Β1. Για να ορίζεται η συνάρτηση $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ πρέπει:

$$\begin{cases} x \in D_g \\ g(x) \in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ g(x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ \dfrac{x}{1-x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x(1-x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 1$$

Επομένως ορίζεται η $f \circ g$ και είναι:

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right) \quad \text{για κάθε } x \in (0,1)$$

Β2. Η h είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (0,1) ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με :

$$h'(x) = \frac{1}{\frac{x}{1-x}} \cdot \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1-x}{x} \cdot \frac{1-x+x}{(1-x)^2}$$

$$\Leftrightarrow h'(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1-x} = \frac{1}{x(1-x)} > 0, \quad \text{για κάθε } x \in (0,1).$$

Επιμέλεια Υλικού: Δήμητρα Χατζηγεωργιάδου

Γ. Ιωαννίδη 3 | Πανόραμα, Θεσσαλονίκη | **Τ:** 2310 341518 | info@protipoedu.gr | **www.protipoedu.gr**

Η h είναι γνησίως αύξουσα στο (0,1) επομένως έχει την ιδιότητα "1 – 1" άρα η h είναι αντιστρέψιμη. Η h είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο A = (0,1). Επομένως το σύνολο τιμών της είναι:

$h(A) = \left(\lim_{x\to 0^+} h(x)\ ,\ \lim_{x\to 1^-} h(x)\right) = (-\infty\ , +\infty)$ διότι:

$$\lim_{x\to 0^+} h(x) = \lim_{x\to 0^+} \ln\left(\frac{x}{1-x}\right) \qquad \underline{\underline{\begin{gathered}\frac{x}{1-x} = u\\ x \to 0^+ \quad u \to 0^+\end{gathered}}}$$

$$= \lim_{u\to 0^+} \ln u = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} h(x) = \lim_{x\to 1^-} \ln\left(\frac{x}{1-x}\right) \qquad \underline{\underline{\begin{gathered}\frac{x}{1-x} = u\\ x \to 1^- \quad u \to +\infty\end{gathered}}}$$

$$\lim_{u\to +\infty} \ln u = +\infty$$

Επομένως, η συνάρτηση h^{-1} έχει πεδίο ορισμού το (–∞ , +∞). Για να βρούμε την αντίστροφη της h θέτουμε: y = h(x) και λύνουμε ως προς x

Έχουμε:

$$y = h(x)$$

$$\Leftrightarrow y = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$$

$$\Leftrightarrow e^y = \frac{x}{1-x}$$

$$\Leftrightarrow e^y - e^y x = x$$

$$\Leftrightarrow e^y = e^y x + x$$

$$\Leftrightarrow e^y = (e^y + 1)x \ \text{ και } e^y + 1 > 0\ , \ \text{ για κάθε } y \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{e^y}{e^y + 1}$$

Άρα ο τύπος της αντίστροφης είναι: $h^{-1}(y) = \frac{e^y}{e^y+1}$, $y \in \mathbb{R}$.

Επιμέλεια Υλικού: Δήμητρα Χατζηγεωργιάδου

Γ. Ιωαννίδη 3 | Πανόραμα, Θεσσαλονίκη | **T:** 2310 341518 | info@protipoedu.gr | **www.protipoedu.gr**

Θέτω όπου y το x οπότε: $h^{-1}(x)=\frac{e^x}{e^x+1}$, $x \in \mathbb{R}$

B3. Η φ είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty\ ,+\infty)$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$\varphi'(x)=\frac{e^x(e^x+1)-e^x\cdot e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{e^x}{(e^x+1)^2}>0 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Επομένως η φ είναι γνησίως αύξουσα στο R και δεν παρουσιάζει ακρότατα στο R. Η συνάρτηση φ' είναι παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$ με

$$\varphi''(x)=\frac{e^x(e^x+1)^2-2(e^x+1)\,e^x\cdot e^x}{(e^x+1)^4}=$$

$$=\frac{e^x(e^x+1)\ -2e^{2x}}{(e^x+1)^3}$$

$$=\frac{e^x-e^{2x}}{(e^x+1)^3},\quad x\in\mathbb{R}$$

Λύνουμε:

Επιμέλεια Υλικού: Δήμητρα Χατζηγεωργιάδου

Γ. Ιωαννίδη 3 | Πανόραμα, Θεσσαλονίκη | **Τ:** 2310 341518 | info@protipoedu.gr | **www.protipoedu.gr**

- $\varphi''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{e^x(1-e^x)}{(e^x+1)^3} = 0 \Leftrightarrow e^x(1-e^x) = 0$

  $\overset{e^x>0\ ,\ x\in\mathbb{R}}{\Longleftrightarrow} \quad 1 - e^x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

- $\varphi''(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{e^x(1-e^x)}{(e^x+1)^3} > 0$

$\Leftrightarrow 1 - e^x > 0,$ διότι $e^x > 0$ και $(e^x + 1)^3 > 0$

$\Leftrightarrow 1 > e^x \overset{e^x\uparrow}{\Leftrightarrow} x < 0$

- $\varphi''(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{e^x(1-e^x)}{(e^x+1)^3} < 0 \Leftrightarrow 1 - e^x < 0$

$\Leftrightarrow 1 < e^x \overset{e^x\uparrow}{\Leftrightarrow} x > 0$

Επομένως προκύπτει ο παρακάτω πίνακας

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\varphi''(x)$	$+$	0	$-$
$\varphi(x)$			

Η φ'' μηδενίζεται στο σημείο $x = 0$ και εκατέρωθεν αλλάζει πρόσημο. Ακόμη ορίζεται η εφαπτομένη της $C\varphi$ στο σημείο $A(0, \varphi(0))$. Οπότε το σημείο $A\ (0, \frac{1}{2})$ είναι σημείο καμπής της $C\varphi$.

B4. Έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty} \varphi(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{e^x + 1} = 0 \quad \text{αφού} \quad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$

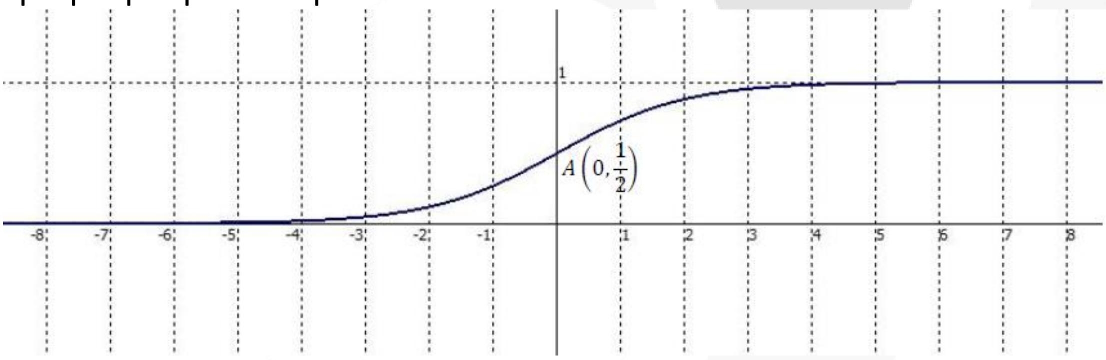
Άρα η ευθεία $y = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της $C\varphi$ στο $-\infty$. Επίσης, έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x+1}\underset{D.l.H.}{\overset{\frac{+\infty}{-\infty}}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{(e^x)'}{(e^x+1)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x}=1$$

Άρα η ευθεία y = 1 είναι οριζόντια ασύμπτωτη της $C\varphi$. Επιπλέον αφού ισχύει $\varphi = \mathrm{h}^{-1}$, η φ έχει σύνολο τιμών το πεδίο ορισμού της h δηλαδή το διάστημα (0,1). Σχηματίζουμε τον πίνακα μεταβολών της φ και χαράσουμε τη γραφική της παράσταση.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\varphi'(x)$	$+$		$+$
$\varphi''(x)$	$+$	0	$-$
$\varphi(x)$	↗		↗
		ΣΚ	

Γραφική παράσταση:



Θέμα Γ

Γ1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο [0, π] με $f\,'(x) = -\sigma\upsilon\nu x$. Έστω $M(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής της εφαπτομένης (ε) της C_f που διέρχεται από το A ($\frac{\pi}{2}$, -$\frac{\pi}{2}$). Η εξίσωση εφαπτομένης στο σημείο M είναι:

$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y + \eta\mu x_0 = -\sigma\upsilon\nu x_0\,(x - x_0).$

Όμως: $A \in (\varepsilon) \Leftrightarrow\; -\frac{\pi}{2} + \eta\mu x_0 = -\sigma\upsilon\nu x_0\,\left(\frac{\pi}{2} - x_0\right) \Leftrightarrow \eta\mu x_0 + \left(\frac{\pi}{2} - x_0\right)\sigma\upsilon\nu x_0\; - \frac{\pi}{2} = 0$

Θεωρούμε τη συνάρτηση: $g(x) = \eta\mu x + \left(\frac{\pi}{2} - x\right)\sigma\upsilon\nu x\; - \frac{\pi}{2},\; x \in [0, \pi].$

Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $[0, \pi]$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$g'(x) = \left(x - \frac{\pi}{2}\right)\eta\mu x$$

Παρατηρούμε ότι: $g(0) = g(\pi) = 0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο $[0, \pi]$.
Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη με: $g'(x) = (x - \frac{\pi}{2})\,\eta\mu x,\; x \in [0, \pi]$
Ισχύει: $g'(x) = 0 \Leftrightarrow (x - \frac{\pi}{2})\,\eta\mu x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = \frac{\pi}{2}$ ή $x = \pi$.
Επίσης: $g'(x) > 0 \Leftrightarrow (x - \frac{\pi}{2})\,\eta\mu x > 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} < x < \pi$ Σχηματίζουμε τον πίνακα μονοτονίας – ακροτάτων:

x	0		$\pi/2$		π
$g'(x)$	0	$-$	0	$+$	0
g		↘		↗	

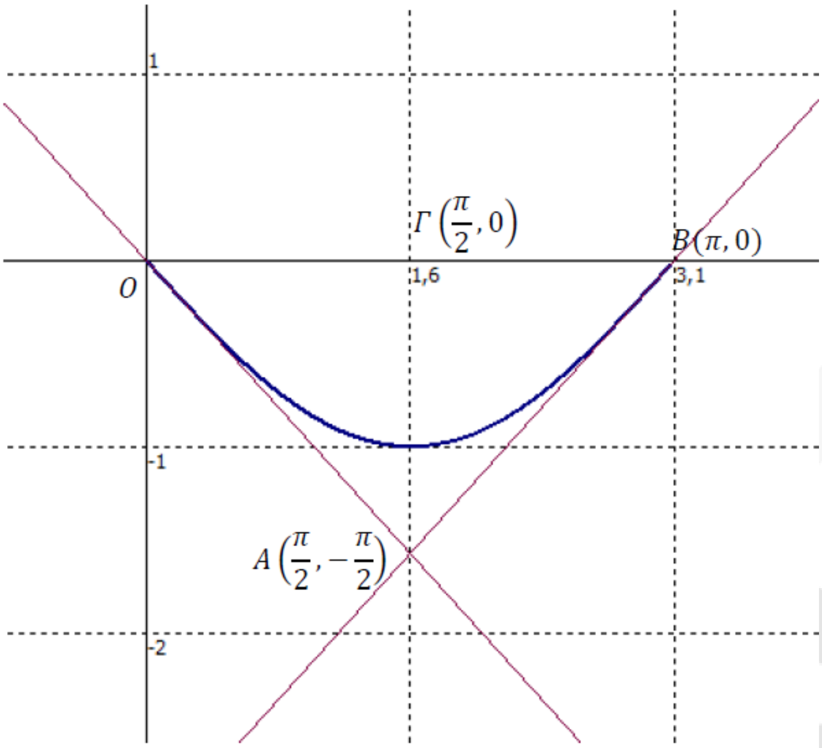
Η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_1 = [0, \frac{\pi}{2}]$ και $0 \in \Delta_1$, οπότε η $g(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο Δ_1 την $x_1 = 0$. Η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2 = [\frac{\pi}{2}, \pi]$ και $\pi \in \Delta_2$, οπότε η $g(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο Δ_2 την $x_2 = \pi$.
Άρα η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει δύο ακριβώς ρίζες στο $[0, \pi]$ και συνεπώς προκύπτουν δύο ακριβώς σημεία επαφής M, δηλαδή δύο ακριβώς εφαπτομένες (ε_1), (ε_2) της C_f που διέρχονται από το σημείο A.

Γ2. Για να βρούμε τα σημεία τομής της C_f με τον $x'x$ λύνουμε στο $[0, \pi]$ την εξίσωση: $f(x) = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = \pi$ γιατί $x \in [0, \pi]$. Για κάθε $x \in [0, \pi]$ ισχύει $\eta\mu x \geq 0 \Leftrightarrow -\eta\mu x \leq 0 \Leftrightarrow f(x) \leq 0$ Επομένως,
$E_2 = \int_0^x |f(x)|dx = -\int_0^x f(x)\,dx = \int_0^x \eta\mu x\;\,dx = [-\sigma\upsilon\nu x]_0^\pi$ =1+1=2 τ.μ.

Το εμβαδό του τριγώνου OAB είναι $E_{OAB} = \frac{(OB)(A\Gamma)}{2} = \frac{1}{2}|\pi|\;\left|-\frac{\Pi}{2}\right| = \frac{\Pi^2}{4}$ Συνεπώς $E_1 = E_{OAB} - E_2$ και τελικά

Επιμέλεια Υλικού: Δήμητρα Χατζηγεωργιάδου

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{E_{OAB} - E_2}{E_2} = \frac{\frac{\pi^2}{4} - 2}{2} = \frac{\pi^2}{8} - 1.$$



Γ3. Η f είναι συνεχής στο $[0, \pi]$ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, \pi)$ με $f''(x) = \eta\mu x > 0$ για κάθε $x \in (0, \pi)$. Επομένως, η f είναι κυρτή στο $[0, \pi]$ και η εφαπτομένη (ε_2) της C_f βρίσκεται κάτω από την C_f με εξαίρεση το σημείο επαφής $B(\pi, 0)$. Δηλαδή $f(x) > x - \pi \Leftrightarrow -\eta\mu x - x + \pi > 0$ για κάθε $x \in [0, \pi)$.

Γ4. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0, \pi]$ με $f''(x) = \eta\mu x \geq 0$ για κάθε $x \in [0, \pi]$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$ και $x = \pi$. Επομένως, η f είναι κυρτή στο $[0, \pi]$ και η εφαπτομένη (ε_2) της C_f βρίσκεται κάτω από την C_f με εξαίρεση το σημείο επαφής $B(\pi, 0)$. Δηλαδή

$$f(x) > x - \pi \overset{x>0}{\Longleftrightarrow} \frac{f(x)}{x} > 1 - \frac{\pi}{x} \text{ για κάθε } x \in (1, e).$$

$$\text{Άρα } \int_1^e \frac{f(x)}{x}\,dx > \int_1^e \left(1 - \frac{\pi}{x}\right) dx = [x - \pi \ln|x|]_1^e = e - \pi - 1 + 0 = e - 1 - \pi$$

Επιμέλεια Υλικού: Δήμητρα Χατζηγεωργιάδου

Θέμα Δ

Δ.1.

• Για την συνέχεια της f έχουμε: Η f είναι συνεχής στο $[-1,0)$ ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων. Η f είναι συνεχής στο $(0,\pi]$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \sqrt[3]{x^4} = 0$$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (e^x \eta\mu x) = 0$, άρα $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$ και η f συνεχής στο 0.

Τελικά η f είναι συνεχής στο $[-1,\pi]$.

• Τα κρίσιμα σημεία της f είναι τα εσωτερικά σημεία του διαστήματος όπου η f δεν είναι παραγωγίσιμη ή ισχύει $f'(x) = 0$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,0)$ με

$$f'(x) = \left(\sqrt[3]{x^4}\right)' = \left(|x|^{\frac{4}{3}}\right)' = \left((-x)^{\frac{4}{3}}\right)'$$

$$= \frac{4}{3}(-x)^{\frac{1}{3}}(-x)' = -\frac{4}{3}\sqrt[3]{-x} < 0$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\pi)$ με

$$f'(x) = (e^x \eta\mu x)' = e^x \eta\mu x + e^x \sigma\upsilon\nu x = e^x(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)$$

$$\kappa\alpha\iota\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x) = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = -\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon\varphi x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4}$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt[3]{x^4}}{x} = \lim_{x\to 0^-}\left(-\frac{(-x)^{\frac{4}{3}}}{(-x)}\right) = \lim_{x\to 0^-}\left(-(-x)^{\frac{1}{3}}\right) = \lim_{x\to 0^-}\left(-\sqrt[3]{-x}\right) = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x \eta\mu x}{x} = \lim_{x\to 0^+} e^x \lim_{x\to 0^+} \frac{\eta\mu x}{x} = 1 \cdot 1 = 1$$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0. Τελικά τα κρίσιμα της f στο $[-1,\pi]$ είναι τα $x_1 = 0$ και $x_2 = \frac{3\pi}{4}$.

Δ2. Οι ρίζες και το πρόσημο της παραγώγου φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Επιμέλεια Υλικού: Δήμητρα Χατζηγεωργιάδου

Γ. Ιωαννίδη 3 | Πανόραμα, Θεσσαλονίκη | **Τ:** 2310 341518 | info@protipoedu.gr | **www.protipoedu.gr**

x	$-\infty$	-1		0		$\frac{3\pi}{4}$		π	$+\infty$
$f'(x)$			$-$		$+$		$-$		
$f(x)$		Τοπικό Μέγιστο $\boxed{1}$	↘	Ελάχιστο $\boxed{0}$	↗	Μέγιστο $\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}}$	↘	Ελάχιστο $\boxed{0}$	

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $[-1,0]$, $[\frac{3\pi}{4}, \pi]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, \frac{3\pi}{4}]$. Έχει τοπικό μέγιστο για $x = -1$, το $f(-1) = 1$ και για $x = \frac{3\pi}{4}$έχει ολικό μέγιστο το $f\,(\frac{3\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}\,.\,e^{\frac{3\pi}{4}} = M$ και ολικό ελάχιστο για $x = 0$, το $f(0) = 0 = m$ και για $x = \pi$, το $f(\pi) = 0 = m$. Σύμφωνα με το Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής (ΘΜΕΤ), η f έχει σύνολο τιμών το $[m, M] = [0, \frac{\sqrt{2}}{2}\,.\,e^{\frac{3\pi}{4}}]$, όπου m το ελάχιστο και M το μέγιστο της f.

Δ3.

$$E = \int_0^{\pi} |f(x) - e^{5x}|\ dx = \int_0^{\pi} |e^{x} \cdot \eta\mu x - e^{5x}|\ dx \ \ (1)$$

Ισχύει: $e^x \cdot \eta\mu x - e^{5x} = e^x \cdot (\eta\mu x - e^{4x})$ Για κάθε $x \in [0, \pi]$ είναι: $x \geq 0 \Leftrightarrow 4x \geq 0 \Leftrightarrow e^{4x} \geq 1 \geq \eta\mu x$ και άρα $\eta\mu x - e^{4x} \leq 0$. Η (1) γίνεται:

$$E = \int_0^{\pi} (e^{5x} - e^{x} \cdot \eta\mu x)\ dx \ =$$

$$\int_0^{\pi} e^{5x}\ dx - \int_0^{\pi} e^{x} \cdot \eta\mu x\ \ dx \ = I_1 - I_2$$

Για το ολοκλήρωμα I_1 έχουμε

Επιμέλεια Υλικού: Δήμητρα Χατζηγεωργιάδου

Γ. Ιωαννίδη 3 | Πανόραμα, Θεσσαλονίκη | **Τ:** 2310 341518 | info@protipoedu.gr | **www.protipoedu.gr**

$$I_1=\int_0^{\pi} e^{5x}\,dx=\left[\frac{1}{5}\cdot e^{5x}\right]_0^{\pi}=\frac{1}{5}\,e^{5\pi}-\frac{1}{5}$$

Για το ολοκλήρωμα I_2 έχουμε

$$I_2=\int_0^{\pi} e^{x}\cdot \eta\mu x\;dx=\int_0^{\pi}(e^{x})'\cdot \eta\mu x\;dx=[e^{x}\eta\mu x]_0^{\pi}-\int_0^{\pi} e^{x}\cdot \sigma\upsilon\nu x\;dx$$

$$=-\int_0^{\pi} e^{x}\cdot \sigma\upsilon\nu x\;dx=-\int_0^{\pi}(e^{x})'\cdot \sigma\upsilon\nu x\;dx=-[e^{x}\sigma\upsilon\nu x]_0^{\pi}-\int_0^{\pi} e^{x}\cdot \eta\mu x\;dx$$

$$=-(-e^{\pi}-1)-I_2\Leftrightarrow$$

$$2\cdot I_2=e^{\pi}+1\Leftrightarrow I_2=\frac{e^{\pi}+1}{2}$$

Άρα $E=I_1-I_2=\frac{1}{5}e^{5\pi}-\frac{1}{5}-\frac{e^{\pi}+1}{2}$

Δ4. Είναι:

$$16\cdot e^{-\frac{3\pi}{4}}\cdot f(x)-e^{-\frac{3\pi}{4}}\cdot(4x-3\pi)^2=8\sqrt{2}\,,\qquad x\in[-1,\pi]$$

$$\Leftrightarrow 16\cdot f(x)-(4x-3\pi)^2=8\sqrt{2}\cdot e^{\frac{3\pi}{4}}$$

$$\Leftrightarrow f(x)-\frac{(4x-3\pi)^2}{16}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot e^{\frac{3\pi}{4}}$$

$$\Leftrightarrow f(x)-\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)^2=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot e^{\frac{3\pi}{4}}$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{3\pi}{4}\right)^2=f(x)-M\le 0$$

$$\text{Άρα}\;\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)^2=0\Leftrightarrow x-\frac{3\pi}{4}=0\Leftrightarrow \boldsymbol{x=\frac{3\pi}{4}}$$

Επιμέλεια Υλικού: Δήμητρα Χατζηγεωργιάδου

Γ. Ιωαννίδη 3 | Πανόραμα, Θεσσαλονίκη | **Τ:** 2310 341518 | info@protipoedu.gr | **www.protipoedu.gr**